MA-2112: SEGUNDO PARCIAL

Universidad Simón Bolívar

Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas

Sartenejas Enero-Marzo 2021 TDD

Nombre:____. Carnet:____________________.

1. (7 pts.) Dada la integral

$$\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy + \int_{0}^{3}\int_{\frac{y-3}{3}}^{\sqrt{y}+1} f(x,y)dxdy$$

a) Grafique la región de integración.

b) Invierta el orden de integración.

2. (10 pts.) Sea el sólido

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y-a)^2 \leq z^2,\ x^2 + y^2 \geq 2a^2,\ 0 \leq z \leq a\}$$

a) Describa la proyección S del sólido T en el plano xy.

b) Calcule el área de la región S.

c) Determine el centroide de la región S.

3. (18 pts.) Sea la integral triple

$$\iiint_U (x^2 + y^2)dV$$

donde

$$U : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 3a^2 \\ x^2 + y^2 + (z-a)^2 \geq a^2 \\ x^2 + y^2 \leq z^2 \\ 3(x^2 + y^2) \geq z^2 \end{cases}$$

a) Describa y grafique el sólido U.

b) Exprese la integral en coordenadas esféricas.

c) Exprese la integral en coordenadas cilíndricas.

4. (10 pts.) Sea el campo vectorial

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y) = \begin{bmatrix} x\lg\text{n}(x^2 + y^2) \\ y\lg\text{n}(x^2 + y^2) \end{bmatrix}$$

Calcule la siguiente integral de línea

$$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

donde C es el contorno que limita a la región

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 4 \geq y^2,\ x + y \leq 2\}$$

y se recorre la curva en sentido antihorario.

Preguntas de recuperación

1. (10 pts.) Utilice el cambio de variable conveniente para calcular la siguiente integral doble

$$\iint_S (x+y^2)dxdy$$

donde

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y^2 \geq 0,\ 2y-y^2-x \geq 0,\ 2y-y^2-x \leq 2-2(x+y^2)\}$$

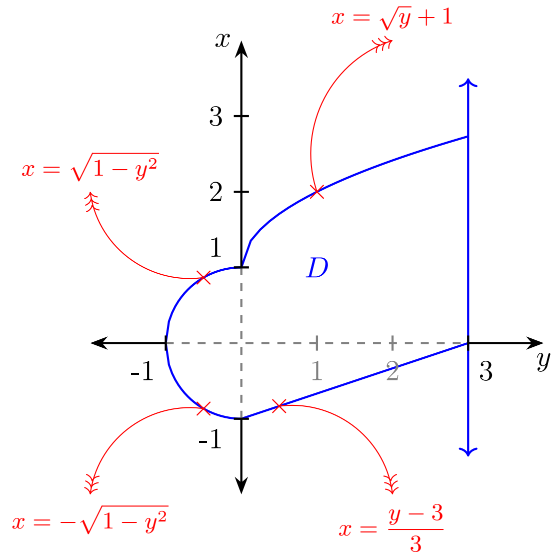
2. (8 pts.) Exprese la longitud de arco de la curva intersección de la superficie $9x^2+4y^2 = 9(4-z)$ con los planos xy y xz en el primer octante desde el punto $A(0,0,4)$ hasta el punto $B(1, 3\sqrt{3}/2, 0)$.

SOLUCIÓN

1. Respondemos el inciso a): De las integrales deducimos que la región de integración D es $D = D_1 \cup D_2$ con:

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 0,\ |x| \leq \sqrt{1-y^2}\}$$
$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 3,\ \frac{y-3}{3} \leq x \leq \sqrt{y}+1\right\}$$

Procedemos a graficar las dos regiones en el mismo plano xy.



Respondemos el inciso b): Invertimos las funciones $x = f(y)$:

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-y^2} \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = -\sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\sqrt{1-y^2} \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = -\sqrt{1-x^2} \\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{y}+1 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases} \implies \begin{cases} y = (x-1)^2 \\ 1 \leq x \leq \sqrt{3}+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{y-3}{3} \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 3(x+1) \\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Como buscamos ahora integrar primero respecto a y, observamos la gráfica de la región D y la escribimos como la unión de los siguientes conjuntos:

$$D_1^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0,\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 3(x+1)\}$$
$$D_2^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 3\}$$
$$D_3^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq \sqrt{3}+1,\ (x-1)^2 \leq y \leq 3\}$$

De esta manera, cambiamos el orden de integración:

$$\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{3(x+1)} f(x,y)dydx+\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{3} f(x,y)dydx+\int_{1}^{\sqrt{3}+1}\int_{(x-1)^2}^{3} f(x,y)dydx \ \blacksquare$$

---

2. Respondemos el inciso a): Para determinar la proyección S en el plano xy, necesitamos una expresión más clara del sólido en cuestión. El sólido T está constituido por:

- $x^2+(y-a)^2 \leq z^2$, la región interna de dos conos cuyas puntas se encuentran en el punto $(0,a,0)$.
- $x^2+y^2 \geq 2a^2$, la región externa al cilindro de radio $\sqrt{2}a$ y cuyo eje de simetría es el eje z.
- $0 \leq z \leq a$, dos planos triviales.

Calculamos la intersección entre los planos y los conos.

$$\begin{cases} x^2+(y-a)^2=z^2 \\ z=a \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+(y-a)^2=z^2 \\ z=0 \end{cases}$$
$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$
$$x^2+(y-a)^2=a^2 \qquad (x,y,z)=(0,a,0)$$

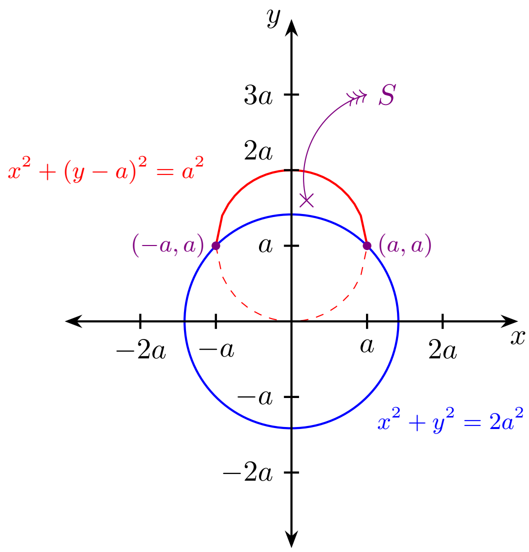
Hemos obtenido la elipse $x^2+(y-a)^2=a^2$ y el punto $(x,y,z)=(0,a,0)$. Fíjese que no calculamos la intersección entre los conos y el cilindro porque buscamos es proyectar el sólido en el plano T en el plano xy, entonces, no nos interesa la región interna del cilindro; nos basta que los valores de (x,y) estén acotados por la elipse $x^2+(y-a)^2=a^2$ y la circunferencia $x^2+y^2=2a^2$. De esta manera,

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+(y-a)^2\leq a^2,\ x^2+y^2\geq 2a^2\} \ \blacksquare$$

Realizamos la intersección entre las proyecciones de cada superficie en el plano xy:

$$\begin{cases} x^2+(y-a)^2=a^2 \\ x^2+y^2=2a^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2+y^2-2ay=0 \\ x^2+y^2=2a^2 \end{cases} \implies (x,y)=(\pm a,a)$$

Bosquejamos la región S.



De esta manera, $S = \{(x,y) \in \mathbb{R} : |x| \leq a,\ \sqrt{2a^2 - x^2} \leq y \leq a + \sqrt{a^2 - x^2}\}$ ■.

<u>Respondemos inciso b):</u> Es conocido que el área de S viene dada por:

$$A(S) = \iint_S dA = \int_{-a}^{a} \int_{\sqrt{2a^2-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} dydx$$

Sin embargo, observada la naturaleza de S, es conveniente utilizar un cambio de variables a coordenadas polares.

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi \\ y = \varrho\mathrm{sen}\varphi \end{cases} , \quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varrho,\varphi)}\right| = \varrho \implies dA = \varrho d\varrho d\varphi$$

Determinamos ahora la expresión de S respecto a las nuevas variables. Para ello, transformamos las curvas que definen las región:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2a^2 \\ x^2 + y^2 - 2ay \leq 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} \varrho^2 \geq 2a^2 \\ \varrho^2 - 2a\varrho\mathrm{sen}\varphi \leq 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \varrho \geq \sqrt{2}a \\ 0 \leq \varrho \leq 2a\mathrm{sen}\varphi \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2a^2 \\ x^2 + y^2 - 2ay \leq 0 \end{cases} &\implies \sqrt{2}a \leq \varrho \leq 2a\mathrm{sen}\varphi \end{aligned}$$

Para determinar las cotas de φ, interceptamos las curvas $\varrho = \sqrt{2}a$ y $\varrho = 2a\mathrm{sen}\varphi$:

$$\begin{cases} \varrho = \sqrt{2}a \\ \varrho = 2a\mathrm{sen}\varphi \end{cases} \implies \sqrt{2}a = 2a\mathrm{sen}\varphi \implies \mathrm{sen}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \varphi = \frac{\pi}{4} \vee \varphi = \frac{3}{4}\pi$$

De esta manera,

$$S = \left\{(\varrho,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi,\ \sqrt{2}a \leq \varrho \leq 2a\mathrm{sen}\varphi\right\}$$

Entonces,

$$A(S) = \iint_S dA = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{\sqrt{2}a}^{2a\mathrm{sen}\varphi} \varrho d\varrho d\varphi = a^2 \quad ■$$

<u>Respondemos inciso c):</u> Es conocido que las coordenadas del centroide, (x_c, y_c), de una región en el plano xy, en nuestro caso S, vienen dadas por:

$$x_c = \frac{1}{A(S)} \iint_S xdA, \quad y_c = \frac{1}{A(S)} \iint_S ydA$$

Ahora, por la simetría de la región S respecto al eje y, deducimos que $x_c = 0$. Sólo debemos calcular y_c. Utilizamos nuevamente coordenadas polares.

$$y_c = \frac{1}{a^2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{\sqrt{2}a}^{2a\mathrm{sen}\varphi} \varrho^2 \mathrm{sen}\varphi d\varrho d\varphi = \frac{\pi}{2}a$$

Entonces, el centroide está ubicado en el punto

$$(x_c, y_c) = \left(0, \frac{\pi}{2}a\right) \quad ■$$

---

3. Respondemos el inciso a): Identificamos las regiones que definen a U:

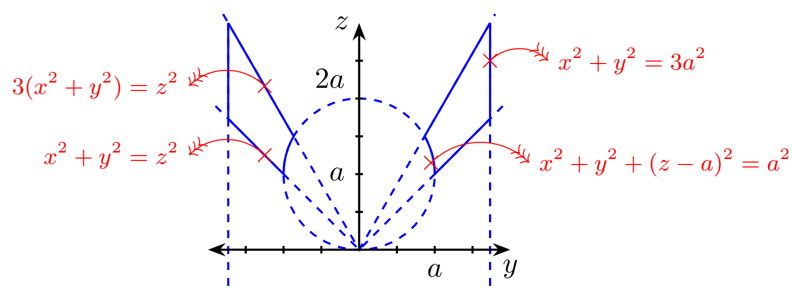
   - $x^2 + y^2 \leq 3a^2$, la región interna de un cilindro de radio $\sqrt{3}a$ y con el eje z como eje simetría.
   - $x^2 + y^2 + (z-a)^2 \geq a^2$, la región externa la esfera de radio a y centrada en $(0, 0, a)$.
   - $x^2 + y^2 \leq z^2$, la región fuera de los dos conos con puntas el origen y ecuación $x^2 + y^2 = z^2$.
   - $3(x^2 + y^2) \geq z^2$, la región entre los dos conos con puntas en el origen y ecuación $3(x^2 + y^2) = z^2$.

   Realizamos la intersección de los conos y la esfera. No nos interesa la intersección entre los conos y el cilindro pues es trivial que esa proyección en el plano xy será la circunferencia $x^2 + y^2 = 3a^2$.

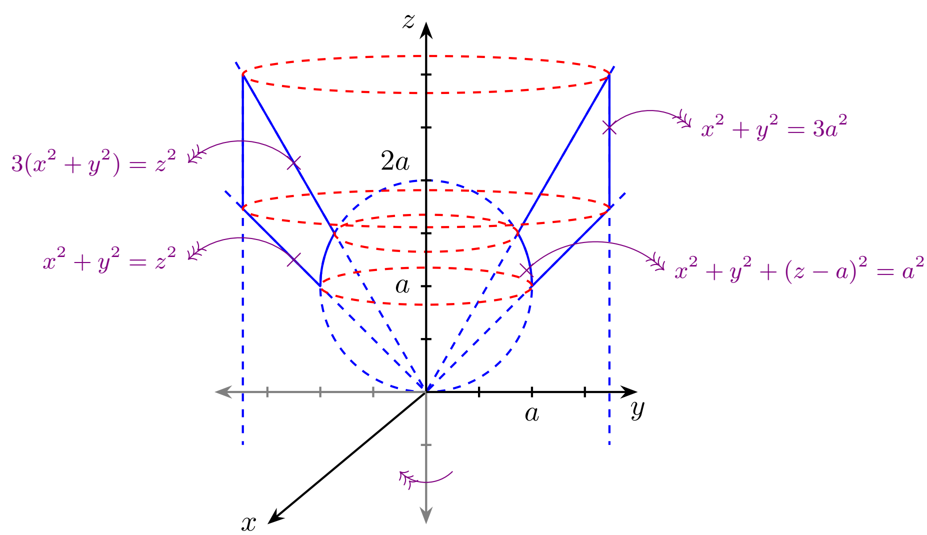
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\implies z^2 + (z-a)^2 = a^2 \\ &\implies z^2 + z^2 - 2az + a^2 = a^2 \\ &\implies 2z^2 - 2az = 0 \\ &\implies z = 0 \ \vee \ z = a \\ &\implies x^2 + y^2 = a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2 \\ 3(x^2 + y^2) = z^2 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\implies z^2 + 3(z-a)^2 = 3a^2 \\ &\implies z^2 + 3z^2 - 6az + 3a^2 = 3a^2 \\ &\implies 4z^2 - 6az = 0 \\ &\implies z = 0 \ \vee \ z = 3a/2 \\ &\implies x^2 + y^2 = 3a^2/4 \end{aligned}$$

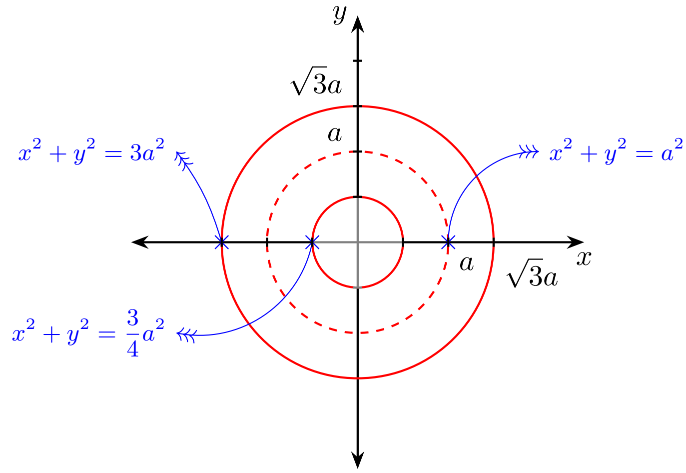
   Conocidas las dos curvas que proyectaremos ne el plano xy, bosquejemos corte transversal de U en el plano yz. Por conveniencia, ignoramos las hojas inferiores de los conos.



   Generamos el sólido U rotando la sección transversal respecto al eje z.



Bosquejamos la proyección de U en el plano xy.



Con los bosquejos del sólido U y su proyección en el plano xy, podemos utilizar la noción de *techo menos piso* para deducir la expresión de U en coordenadas cartesianas. El sólido U corresponde a la unión de los siguientes sólidos:

$$U_1 : \begin{cases} a+\sqrt{a^2-(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{3(x^2+y^2)} \\ x^2+y^2 \leq a^2 \\ x^2+y^2 \geq \dfrac{3}{4}a^2 \end{cases} \qquad \blacksquare$$

$$U_2 : \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{3(x^2+y^2)} \\ x^2+y^2 \leq 3a^2 \\ x^2+y^2 \geq a^2 \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Respondemos el inciso b): Debemos realizar el cambio:

$$\begin{cases} x=\rho\,\text{sen}\theta\cos\varphi \\ y=\rho\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi \\ z=\rho\cos\theta \end{cases}, \quad \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}\right| = \rho^2\text{sen}\theta, \quad dV=\rho^2\text{sen}\theta d\rho d\varphi d\theta$$

Determinamos ahora los límites de integración y evaluamos el integrando en el cambio.

- Las cotas del ángulo azimutal, φ, son triviales pues al observar la proyección de U en el plano xy deducimos que trabajamos en los cuatro cuadrantes. Entonces, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
- Las cotas del ángulo polar, θ, las deducimos de las ecuaciones de los conos.

$$z^2=3(x^2+y^2) \implies \rho^2\cos^2\theta = 3\rho^2\text{sen}^2\theta \implies \tan^2\theta=3 \implies \theta=\frac{\pi}{6}$$
$$z^2=x^2+y^2 \implies \rho^2\cos^2\theta = \rho^2\text{sen}^2\theta \implies \tan^2\theta=1 \implies \theta=\frac{\pi}{4}$$
$$\therefore \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

- Las cotas para ρ las deducimos evaluando el cambio en la ecuación de la esfera y la del cilindro (fíjese que si trazamos un radio vector desde el origen, partimos del esfera y llegamos al cilindro).

$$\begin{array}{c|c} x^2+y^2+(z-a)^2 \geq a^2 & x^2+y^2 \leq 3a^2 \\ \Downarrow & \Downarrow \\ \rho^2\text{sen}^2+\rho^2\cos^2\theta-2a\rho\cos\theta \geq 0 & \rho^2\text{sen}^2 \leq 3a^2 \\ \Downarrow & \Downarrow \\ \rho \geq 2a\cos\theta & \rho \leq \dfrac{\sqrt{3}a}{\text{sen}\theta} \end{array}$$

$$\therefore 2a\cos\theta \leq \rho \leq \frac{\sqrt{3}a}{\text{sen}\theta}$$

- El integrando en esféricas sería $x^2 + y^2 = \rho^2\text{sen}^2\theta$.

De esta manera, la integral en coordenadas esféricas es:

$$\iiint_U (x^2+y^2)dV = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_{2a\cos\theta}^{\sqrt{3}a/\text{sen}\theta} \rho^4\text{sen}^3\theta d\rho d\theta d\varphi \;\blacksquare$$

Respondemos el inciso c): Debemos realizar el cambio:

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi \\ y = \varrho\text{sen}\varphi \\ z = a \end{cases}, \quad \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\varphi,z)}\right| = \varrho, \quad dV = \varrho d\varrho d\varphi dz$$

Determinamos ahora los límites de integración y evaluamos el integrando en el cambio.

1. Las cotas del ángulo azimutal, φ, son triviales pues al observar la proyección de U en el plano xy deducimos que trabajamos en los cuatro cuadrantes. Entonces, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
2. Las cotas para el radio las obtenemos evaluando el cambio en las proyecciones de U:

$$x^2+y^2 = a^2 \implies \varrho = a$$
$$x^2+y^2 = 3a^2 \implies \varrho = \sqrt{3}a$$
$$x^2+y^2 = \frac{3}{4}a^2 \implies \varrho = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

3. Las cotas para z las obtenemos evaluando el cambio en las ecuaciones que definen a los sólidos U_1 y U_2:

$$z = a + \sqrt{a^2-(x^2+y^2)} \implies z = a + \sqrt{a^2-\varrho^2}$$
$$z = \sqrt{3(x^2+y^2)} \implies z = \sqrt{3}\varrho$$
$$z = \sqrt{x^2+y^2} \implies z = \varrho$$

4. El integrando en cilíndricas sería $x^2+y^2 = \varrho^2$.

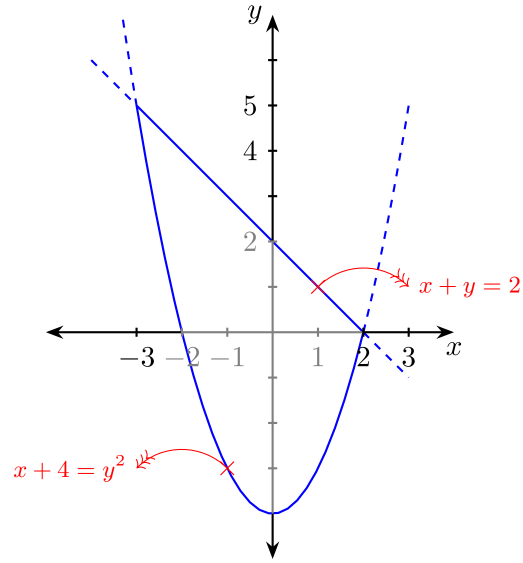
De esta manera la integral en coordenadas cilíndricas es naturalmente la suma de dos integrales triples (dado que $U = U_1 \cup U_2$):

$$\iiint_U (x^2+y^2)dV = \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{3}a/2}^{a}\int_{a+\sqrt{a^2-\varrho^2}}^{\sqrt{3}\varrho} \varrho^3 dz d\varrho d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_a^{\sqrt{3}a}\int_{\varrho}^{\sqrt{3}\varrho} \varrho^3 dz d\varrho d\varphi \;\blacksquare$$

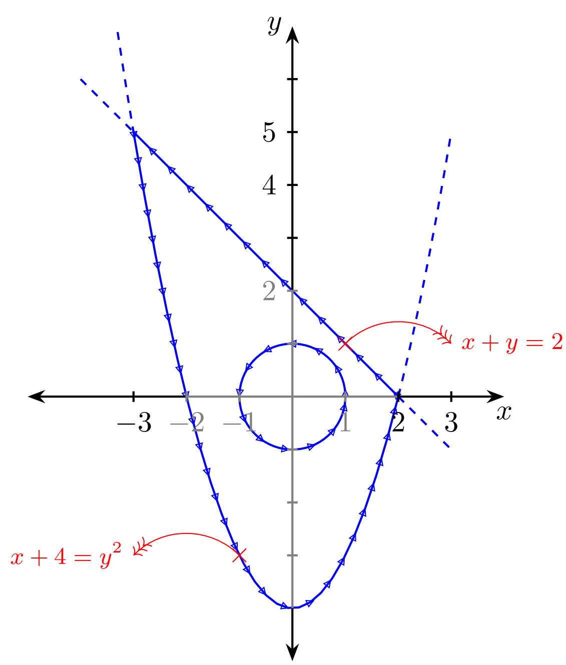
---

4. Primero, bosquejemos la región S de interés.

$$\begin{cases} x+4 = y^2 \\ x+y = 2 \end{cases} \implies y^2 - y = 6 \implies y = 2 \vee y = -3$$



Observamos ahora que el campo $\vec{\mathbf{F}}$ es discontinuo en el origen, entonces D es una región múltiplemente conexa pues tiene un hueco en el origen. Debemos aplicar entonces el Teorema de Green para regiones múltiplemente conexas. Para ello, vamos a considerar una circunferencia centrada en el origen y de radio r que recorremos en el sentido de Green.



Usamos entonces el Teorema de Green para regiones múltiplemente conexas tomando la curva $\mathcal{C} = \partial D$ y la curva interna $\mathcal{C}' \equiv x^2 + y^2 = r^2$:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy - \oint_{\mathcal{C}'} Pdx + Qdy$$

donde,

$$\begin{bmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\text{lgn}(x^2+y^2) \\ y\text{lgn}(x^2+y^2) \end{bmatrix} \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

De esta manera, el problema se reduce a calcular sólo una integral de línea.

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy = \oint\limits_{\mathcal{C}'} Pdx + Qdy$$

Parametrizamos $\mathcal{C}'$ utilizando coordenadas polares.

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \text{sen}\varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$
$$d\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = rd\varphi \begin{pmatrix} -\text{sen}\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

Entonces,

$$\begin{bmatrix} P(r,\varphi) \\ Q(r,\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \text{lgn}(r^2) \\ r\text{sen}\varphi \text{lgn}(r^2) \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} P(r,\varphi)dx \\ Q(r,\varphi)dy \end{bmatrix} = 2r^2\text{lgn}(r)d\varphi \begin{bmatrix} -\cos\varphi\text{sen}\varphi \\ \cos\varphi\text{sen}\varphi \end{bmatrix}$$

Finalmente, tenemos que:

$$\int\limits_{C} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \oint\limits_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy = 2r^2\text{lgn}(r) \int\limits_{0}^{2\pi} (-\cos\varphi\text{sen}\varphi + \cos\varphi\text{sen}\varphi)d\varphi = 0 \;\blacksquare$$

SOLUCIÓN//RECUPERACIÓN

1. Proponemos el siguiente cambio de variables $u = x + y^2$ y $v = 2y$. Un cambio que sólo es válido si la transformación asociada, $T(u,v) = (x,y)$, es de clase $\mathcal{C}^1$ e inyectiva. Debemos entonces probar tales condiciones antes de utilizar la transformación.

$$\begin{cases} u = x + y^2 \\ v = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} x = u - v^2/4 \\ y = v/2 \end{cases}$$

La transformación asociada es:

$$T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - v^2/4 \\ v/2 \end{pmatrix}$$

Veamos si cumple las condiciones:

- ¿Es de clase $\mathcal{C}^1$? Calculamos y analizamos la matriz jacobiana.

$$J_T(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

  Como las componentes de la matriz son polinomios, funciones continuas en su dominio, la transformación es de clase $\mathcal{C}^1$ $\checkmark$.

- ¿Es inyectiva? Probemos con dos puntos a, b y c, d.

$$T(a,b) = T(c,d) \implies \begin{pmatrix} a - b^2/4 \\ b/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - d^2/4 \\ d/2 \end{pmatrix} \implies (a,b) = (c,d)$$

  Se cumple la definición de inyectividad, la transformación es inyectiva $\checkmark$.

La transformación cumple las condiciones para el teorema de cambio de variables, el cambio de variables es válido entonces. Procedemos a determinar una expresión para S en las variables u y v.

$$\begin{cases} x + y^2 \geq 0 \\ 2y - y^2 - x \geq 0 \\ 2y - y^2 - x \leq 2 - 2(x + y^2) \end{cases} \implies \begin{cases} u \geq 0 \\ v \geq u \\ v \leq 2 - u \end{cases}$$

Podemos deducir rápidamente que la intersección entre las rectas $v = u$ y $v = 2 - u$ es el punto $(u,v) = (1,1)$. Así, $S = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1,\ u \leq v \leq 2 - u\}$. Con esta expresión de S y sabiendo que el jacobiano de la transforamción es:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \text{abs}\left(\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v/2 & 1/2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}$$

La integral con el cambio de variable es:

$$\iint_S (x + y^2)\,dxdy = \int_0^1 \int_u^{2-u} \frac{1}{2} u\,dvdu = \frac{1}{6} \quad \blacksquare$$

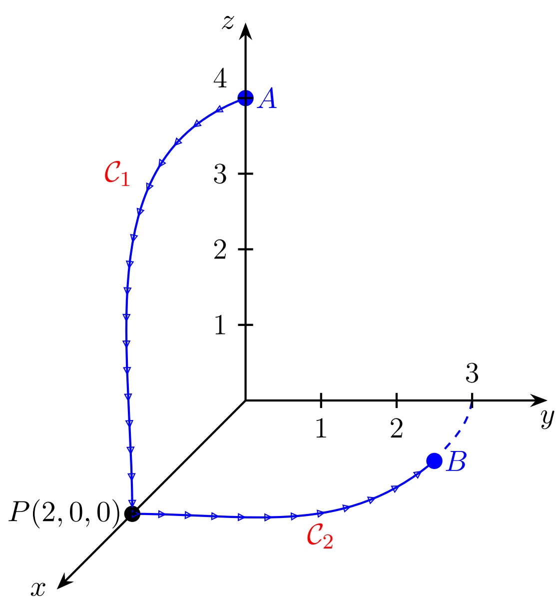
2. Primero determinamos la ecuación de la curva intersección entre el paraboloide con vértice en $(0,0,4)$ y los planos $z=0$, xy, e $y=0$, xz.

$$\begin{cases} 9x^2+4y^2 = 9(4-z) \\ z=0 \end{cases} \implies 9x^2+4y^2 = 9\cdot 4 \implies \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$
$$\begin{cases} 9x^2+4y^2 = 9(4-z) \\ y=0 \end{cases} \implies x^2 = 4-z \implies z = 4-x^2$$

La curva intersección, $\mathcal{C}$, entre el paraboloide y los planos xy y xz es la unión la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ y la parábola $z=4-x^2$. Como nos interesa sólo el primer octante, las curvas de estudio son:

$$\mathcal{C}_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=4-x^2,\ y=0,\ x\geq 0,\ z\geq 0\}$$
$$\mathcal{C}_2 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\ z=0,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}$$

Bosquejemos a $\mathcal{C}$ considerando que recorreremos la curva desde el punto $A(0,0,4)$ hasta el punto $B(1,3\sqrt{3}/2,0)$. Puede verificarse fácilmente que las curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ se interceptan en el primer octante en el punto P(2,0,0).



Conocidas las curvas, procedemos a expresar la longitud de arco de $\mathcal{C}$ que será la suma de la longitud de arco de las curvas que la componen. Recordamos que sea $\vec{\sigma}(\lambda):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ la parametrización de una curva $\mathcal{C}'$, la longitud de arco entre dos puntos $A',B'\in\mathcal{C}'$ viene dada por:

$$L\{\mathcal{C}'\} = \int_{A'}^{B'} \left\|\frac{d}{d\lambda}\vec{\sigma}\right\| d\lambda = \int_{A'}^{B'} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2}\, d\lambda$$

Entonces, parametrizamos las dos curvas, calculamos sus longitud de arco y los sumamos.

- Curva $\mathcal{C}_1$: Tomamos la siguiente parametrización.

$$\vec{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 4-t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2 \because \begin{cases} \vec{\sigma}_1(0) = (0,0,4) \\ \vec{\sigma}_1(2) = (2,0,0) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2t \end{pmatrix}, \quad 0 < t < 2$$

Calculamos la longitud de arco:

$$L\{\mathcal{C}_1\} = \int_0^2 \sqrt{1+4t^2}dt$$

- Curva $\mathcal{C}_2$: Tomamos coordenadas porlares generalizadas.

$$\vec{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 3\text{sen}t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \pi/3 \because \begin{cases} \vec{\sigma}_2(0) = (2,0,0) \\ \vec{\sigma}_2(\pi/3) = (1, 3\sqrt{3}/2, 0) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\text{sen}t \\ 0 \\ 3\cos t \end{pmatrix}, \quad 0 < t < \pi/3$$

Calculamos la longitud de arco:

$$L\{\mathcal{C}_2\} = \int_0^{\pi/3} \sqrt{4\text{sen}^2(t) + 9\cos^2(t)}dt$$

Finalmente,

$$L\{\mathcal{C}\} = \int_0^2 \sqrt{1+4t^2}dt + \int_0^{\pi/3} \sqrt{4\text{sen}^2(t) + 9\cos^2(t)}dt \quad \blacksquare$$

Este parcial fue resuelto y digitalizado por Asxel Ramírez para GECOUSB

Asxel Ramirez
18-10322
Lic. Química
Twitter: @asx.0088

gecousb.com.ve
Twitter: @gecousb
Instagram: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com